Praktikum unter Benutzung mathematischer Softwarepakete, SS 2008, Bearbeitung der Hausaufgabe Nr. 28

Beschreibung der Lösung

Der Lichtstrahl bildet auf seinem Weg um die z-Achse den Mantel eines Drehkegels. Es handelt sich folglich um einen Rotationskörper. Daher ist es zweckdienlich, die x- und y-Koordinate des kartesischen Systems durch Polarkoordinaten darzustellen, d. h. durch den Winkel $\phi \in \mathbb{R}$ und den Radius $r \in \mathbb{R}_0^+$. Man erhält:

$$x = r \cdot cos(\phi),\ y = r \cdot sin(\phi)$$

Die z-Koordinate des Lichtstrahls hängt demnach in Form einer Geradengleichung vom Stützpunkt $(0, 0, 1)$, der (nach unten gerichteten) Steigung $-\theta = -\frac{\pi}{4}$ und r ab, also:

$$z = 1 - r \cdot \frac{\pi}{4} \tag{1}$$

Jeder Punkt, den der Lichtstrahl erreichen kann, liegt auf dem erzeugten Kegelmantel, d. h. in der Menge

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} cos(\phi) \\ sin(\phi) \\ -\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \right\}$$

Die Punkte der Erdoberfläche befinden sich gemäß Aufgabenstellung und Nutzung von Polarkoordinaten in der Menge

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot cos(\phi) \\ r \cdot sin(\phi) \\ \frac{-cos(r \cdot cos(\phi) \cdot (r \cdot sin(\phi))^3)}{\sqrt{3 + sin(r \cdot cos(\phi)) \cdot cos(r \cdot sin(\phi))}} \end{pmatrix} \right\}$$

Die Punkte der Schnittmenge $K \cap F$ bilden die Kurve, die der Lichtstrahl beschreitet. Da diesbezüglich die x-Komponenten und die y-Komponenten der Punkte aus K und F jeweils übereinstimmen, müssen ϕ und r lediglich folgende Gleichung erfüllen, die sich durch Gleichsetzen der z-Komponenten ergibt:

$$\frac{-cos(r \cdot cos(\phi) \cdot (r \cdot sin(\phi))^3)}{\sqrt{3 + sin(r \cdot cos(\phi)) \cdot cos(r \cdot sin(\phi))}} - 1 + r \cdot \frac{\pi}{4} = 0 \tag{2}$$

Im Programm durchläuft ϕ in äquidistanten Schritten das Intervall $[0; 2\pi[$. In jedem Schritt wird eine Nullstellensuche in Gleichung (2) durchgeführt, um den zu ϕ gehörigen Radius zu ermitteln, bei dem der Lichtstrahl auf die Erdoberfläche trifft. Dazu wird eine modifizierte Version der Funktion `bisect.m` eingesetzt, die in den Kursunterlagen vorgestellt wurde. Sie erlaubt zusätzlich die Übergabe eines zweiten Parameters (hier ϕ).

Um das in der Funktion genutzte Intervallhalbierungsverfahren möglichst schnell zu halten, wurde im Vorfeld eine Abschätzung von r im Schnitt vorgenommen. Den höchsten bzw. niedrigsten Punkt der Erdoberfläche findet man über eine Extremwertbestimmung der z-Koordinate der Punkte aus F. Das Maximum liegt bei $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$, das Minimum bei $z = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Durch Einsetzen in Gleichung (1) lässt sich bestimmen, bei welchem Radius der Lichtstrahl auf dieser

Höhe ankommt. Es folgt für die Kurve, dass sich r im Intervall $[\frac{-2\sqrt{2}+4}{\pi}; \frac{2\sqrt{2}+4}{\pi}]$ bewegen muss, also ungefähr zwischen 0,3 und 2,2. Diese Werte werden als Startwerte beim Intervallhalbierungsverfahren eingesetzt.

Anhand der ermittelten Nullstelle werden die Koordinaten des Schnittpunkts berechnet und in jeweils einem Vektor für x-, y- und z-Richtung gespeichert. Sie dienen als Grundlage für die Ausgabe der Koordinatenprojektion der Kurve mittels des `plot`-Befehls und für die Errechnung der Matrizen, die der `mesh`-Befehl nutzt. Zum Schluss erfolgt eine grafische Ausgabe der Erdoberfläche (grau) und der Schnittkurve (rot). Der Standort der Lichtquelle ist zusätzlich als kleiner roter Kreis gekennzeichnet (vgl. Abb. 1).

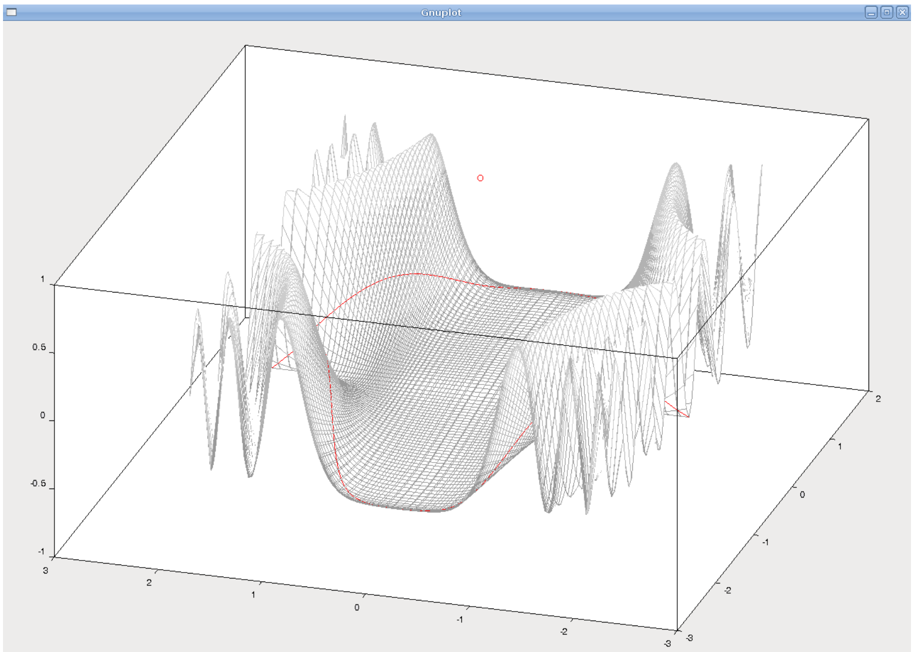

Abbildung 1: Darstellung von Erdoberfläche (grau) und darauf liegender Schnittkurve (rot)

Die Berechnungen wurden unter Verwendung von Ubuntu Linux 8.04 sowie GNU Octave in Version 3.0.0.9 durchgeführt und optisch überprüft.

Anleitung zur Bedienung

Kopieren Sie die Dateien `hausaufgabe.m`, `nullstelle.m` und `nullfunktion.m` in das Verzeichnis, auf das Matlab bzw. Octave zugreift. Starten Sie Matlab bzw. Octave und geben Sie `hausaufgabe` (gefolgt von <Enter>) ein. Nach Abschluss der Berechnung werden die Erdoberfläche (grau) sowie die Schnittkurve (rot) zur optischen Überprüfung ausgegeben. Im Anschluss können Sie sich die jeweilige Koordinatenprojektion durch Eingabe von `plot(x,y)`, `plot(y,z)` bzw. `plot(x,z)` (jeweils gefolgt von <Enter>) ausgeben lassen.

Anhang

Koordinatenprojektionen

Folgend sind die Koordinatenprojektionen der Kurve in den jeweiligen Ebenen dargestellt.

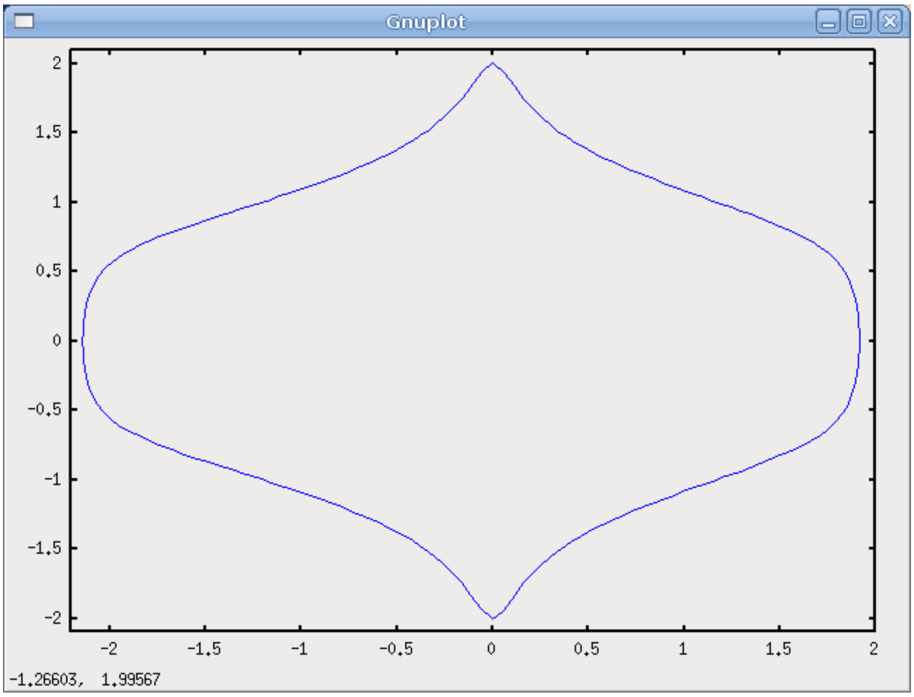

Abbildung 2: Koordinatenprojektion in der x-y-Ebene

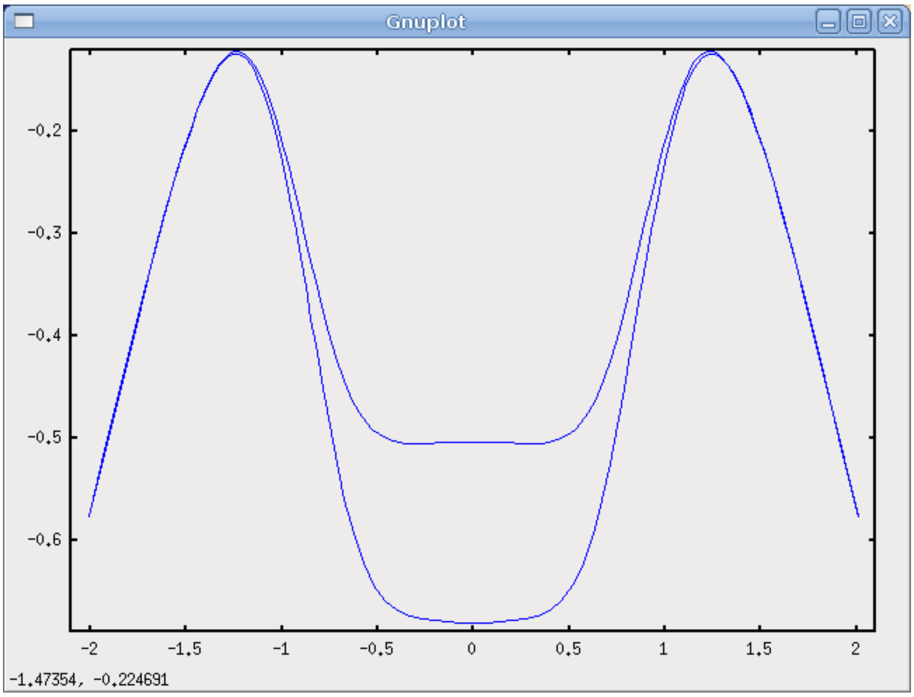

Abbildung 3: Koordinatenprojektion in der y-z-Ebene

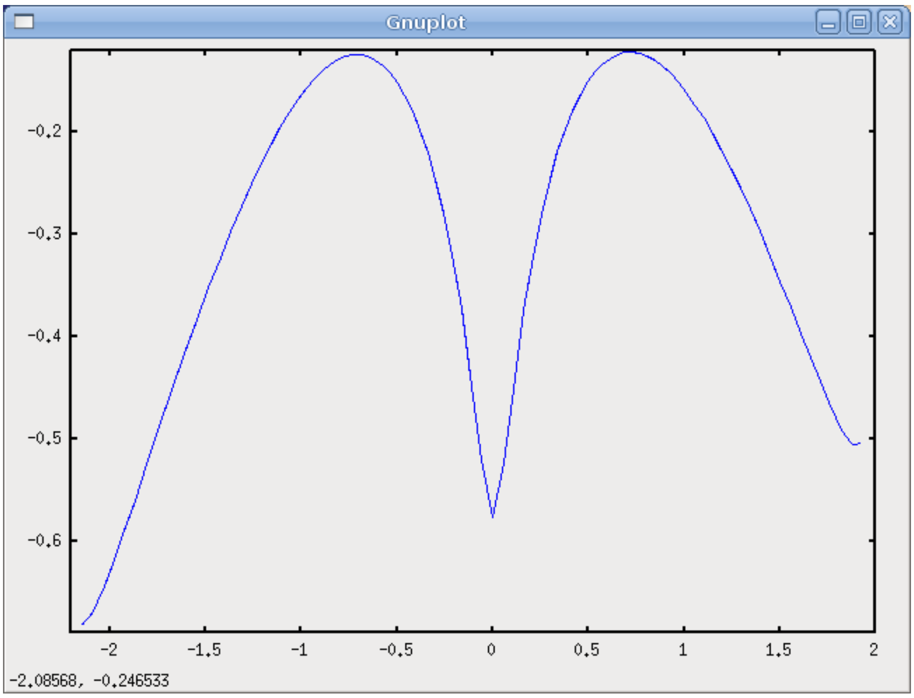

Abbildung 4: Koordinatenprojektion in der x-z-Ebene