Vortragsausarbeitung zum Thema

Sitzverteilungen

Oliver Tacke
Mathematik, Bachelor

11. Mai 2009

Betreuer:
Prof. Dr. Werner Kirsch
Dipl.-Math. Jessica Langner

FernUniversität in Hagen
Fakultät für Mathematik und Informatik
Lehrgebiet Stochastik

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1 Einleitung

Am 23. Mai 2009 wird zum dreizehnten Mal die Bundesversammlung zusammentreten, um den deutschen Bundespräsidenten zu wählen. Neben den amtierenden Mitgliedern des Bundestages gehört diesem Gremium eine gleiche Anzahl von Delegierten an, die von den Volksvertretungen der Länder nach den Grundsätzen der Verhältniswahl bestimmt werden (Art. 54 Abs. 3 GG). Ende März 2009 sorgte eine „Laune der Mathematik“[1] dafür, dass Horst Köhler eine bisher sicher geglaubte Stimme verlor: Allein dadurch, dass in Bayern SPD und Grüne eine gemeinsame Liste bildeten statt getrennt anzutreten, verschob sich die Anzahl der ihnen zustehenden Delegierten zu ihren Gunsten. Ursache für dieses Phänomen ist das spezielle Verteilungsverfahren, das zur Umrechnung von Stimmenanteilen auf die zur Verfügung stehenden Plätze der Bundesversammlung genutzt wird. Fraglich ist an dieser Stelle, ob man diesen aus Sicht der CDU „unschönen“ Effekt nicht hätte ausschließen können.

Die vorliegende Arbeit beschreibt zunächst die historischen Hintergründe der in Deutschland verwendeten Verfahren und deren grundlegende Funktionsweise. Als Ergänzung wird auf weitere Verfahren kurz eingegangen. Im Anschluss wird dargelegt, welche Anforderungen Sitzverteilungsverfahren grundsätzlich erfüllen sollten und welche Paradoxien sie aufweisen können. Die in Deutschland

[1] Spiegel Online (2009).

gebräuchlichen Methoden werden diesbezüglich untersucht und gegenübergestellt. Eine Zusammenfassung und ein Ausblick auf zukünftige Entwicklungen schließen die Arbeit ab.

Die Arbeit basiert im Wesentlichen auf den Werken von Balinski/Young (1982), Carnal/Riedwyl (2006), Kopfermann (1991), Pukelsheim (1998) und Taylor/Pacelli (2008) die von der Kursleitung vorgeschlagen wurden und nicht explizit zitiert werden. Anderes fremdes Gedankengut ist entsprechend kenntlich gemacht worden.

2 Sitzverteilungsverfahren

Der Zweck eines Sitzverteilungsverfahrens bei Verhältniswahlen liegt darin, p Parteien proportional zu den auf sie entfallenden Stimmen $s_1, ..., s_p$ die Mandate $m_1, ..., m_p$ zuzuteilen.[2] Die Gesamtzahl der abgegebenen Stimmen sei dabei $S = \sum_{i=1}^{p} s_i$, die Gesamtzahl der zu vergebenden Mandate $M = \sum_{i=1}^{p} m_i$, das heißt es werden stets genau die zur Verfügung stehenden Mandate auch vergeben. Die i-te Partei hat dann einen Idealanspruch von

$$m_i = \frac{s_i}{S} M$$

Sitzen. Diese sogenannte Quote ist allerdings im Allgemeinen keine natürliche Zahl, so dass man eine „möglichst gerechte" Näherung finden muss. Für diesen Zweck existieren eine Vielzahl von Verfahren, die alle gewisse Vorzüge und Nachteile aufweisen.

Zur Anschauung der Verfahren soll generell folgende Ausgangssituation dienen: Angenommen, es sind in einem Parlament 100 Sitze zu verteilen. Sechs Parteien A, B, C, D, E und F haben sich an der Wahl beteiligt und folgende Anteile an den gültigen abgegebenen Stimmen erhalten:

Partei	**Stimmenanteile**
A	32,1%
B	28,9%
C	14,3%
D	12,2%
E	8,7%
F	3,8%

Tabelle 1: Ausgangsbeispiel

Wie man hier leicht sehen kann, müssten den Parteien nicht ganzzahlige Sitzzahlen zugewiesen werden.

[2]Ungültige Stimmen seien fortan stets berücksichtigt.

2.1 Gebräuchliche Verfahren in Deutschland

Es scheint ein Phänomen zu sein, dass Verfahren häufig nicht nach ihren Entwicklern benannt werden, sondern nach ihren Neuentdeckern bzw. den ersten bekannten Verfechtern.[3] So tragen auch die in den folgenden drei Unterabschnitten beschriebenen Methoden nicht die Namen der eigentlichen Urheber. Da sich ihre Bezeichnungen (Methode nach Hare-Niemeyer, nach d'Hondt bzw. nach Sainte-Laguë) aber im deutschsprachigen Raum durchgesetzt haben, werden sie auch hier verwendet.

2.1.1 Methode nach Hare-Niemeyer

Im Jahre 1791 führte die damals noch junge Nation der Vereinigten Staaten von Amerika eine Volkszählung durch, um die bisher dahin recht willkürliche Sitzverteilung im Repräsentantenhaus aufzuheben. Dies war notwendig, da damals nicht von einer festen Anzahl von Sitzen im Repräsentantenhaus ausgegangen wurde, sondern von einem festen Vertretungsverhältnis: Es sollte jeweils einen Repräsentanten für eine bestimmte Anzahl an Bürgern eines Bundesstaates geben. Zunächst wurde diese Anzahl festgelegt und dann die Bevölkerungszahl der Bundesstaaten jeweils durch diesen Wert geteilt, der daher auch Divisor genannt wird. Nach langen Diskussionen einigten sich die Verantwortlichen zunächst auf einen Teiler von 33.000. Es ergeben sich bei der Division aber in der Praxis unweigerlich Reste, die ursprünglich ignoriert wurden. So erhielt zum Beispiel der Bundesstaat North Carolina mit 353.523 Einwohnern 10 Mandate ($\frac{353.523}{33.000} \approx 10,713$).

Der US-amerikanische Finanzminister Alexander Hamilton argumentierte, dass das außer Acht lassen von Resten große Staaten bevorzuge. Er entwickelte daher ein Verfahren, dass nicht mehr von einer variablen Sitzanzahl ausging, sondern diese festsetzte. Im nächsten Schritt wurden die Bevölkerungsanteile der Staaten an der Gesamtbevölkerung bestimmt und dazu proportional Sitze verteilt. Die auch dabei auftretenden Reste wurden nicht ignoriert, sondern ihrer Größe nach sortiert und nacheinander den Staaten zugeteilt, bis alle Sitze vergeben waren.

Der englische Rechtsanwalt Thomas Hare nutzte dieses Verfahren im 19. Jahrhundert für das Wahlsystem in Irland, indem er es von Staaten und deren Bevölkerungszahlen auf Parteien und deren erhaltene Stimmen übertrug: Bei einer festen Anzahl von Sitzen wurden die Stimmenanteile der Parteien an der Gesamtstimmenzahl bestimmt und dazu proportional Sitze verteilt. Man wird auf das eingangs genannte Problem der „möglichst gerechten" Bestimmung der Quote $m_i = \frac{s_i}{S}M$ geführt. Hare löste es, indem die Quotienten abgerundet wurden. Nach seinem Verfahren werden die Mandate, die die i-te Partei erhält,

[3] So wurde zum Beispiel das Prinzip des Gauß'schen Eliminationsverfahren schon vor etwa 2000 Jahren in einem chinesischen Mathematikbuch als Fang-cheng-Methode erwähnt; vgl. z. B. Wußing (2008), S. 62. Ähnlich verhält es sich mit dem Satz des Pythagoras, der nicht von seinem Namensgeber stammt; vgl. z. B. Drösser (2009), S. 169 oder Wußing (2008), S. 55.

mittels der Formel $\lfloor m_i = \frac{s_i}{S} M \rfloor$ bestimmt.[4] Einige Mandate werden somit möglicherweise nicht vergeben. Das Verfahren wurde daher um die Restemethode von Hamilton ergänzt: Die verbleibenden Mandate fallen der Reihe nach an diejenigen Parteien, die stimmenmäßig die größten Reste vorweisen. Auf diese Weise wird der Quote soweit wie möglich Genüge getan, wenngleich sie nicht ganz erreicht werden kann.

Der deutsche Mathematiker Horst Niemeyer brachte das Verfahren 1970 beim Bundestagspräsidenten in Erinnerung. Es wurde daraufhin vom Deutschen Bundestag für die Besetzung der Ausschüsse und Gremien beschlossen und war bis zum Ende der achten Wahlperiode im Einsatz.[5]

Das Hare-Niemeyer-Verfahren zählt zu den sogenannten Quotenverfahren, bei denen zunächst die Quote jeder Partei bestimmt und dann auf- oder abgerundet wird.

Für das eingangs formulierte Beispiel ergibt sich nach diesem Ansatz die Mandatsverteilung, wie sie in Tabelle 2 dargestellt ist.

Partei	**Stimmenanteil**	$\lfloor m_i = \frac{s_i}{S} M \rfloor$	**Reste**	**Rang**	**Mandate**
A	32,1%	32	0,1	6	$32 + 0 = 32$
B	28,9%	28	0,9	1	$28 + 1 = 29$
C	14,3%	14	0,3	4	$14 + 0 = 14$
D	12,2%	12	0,2	5	$12 + 0 = 12$
E	8,7%	8	0,7	3	$8 + 1 = 9$
F	3,8%	3	0,8	2	$3 + 1 = 4$

Tabelle 2: Mandatsverteilung nach Hare-Niemeyer

Zunächst werden die Quoten abgerundet. Summiert man sie nun auf, werden erst 97 der 100 Mandate vergeben. Die verbleibenden Sitze werden sukzessive den Parteien in der Reihenfolge der größten verbleibenden Reste zugeordnet.

2.1.2 Methode nach d'Hondt

Nachdem Hamilton seine Methode dem damaligen US-Präsidenten George Washington vorgeschlagen hatte, verteidigte der Staatssekretär Thomas Jefferson sein eigenes Verfahren. Er argumentierte, die Verfassung sehe keine Behandlung von Resten vor. Sie schreibe jedoch einen einzigen Teiler vor, der angeben sollte, wie viele Bürger von einem Repräsentanten vertreten werden. Dieser Teiler müsse gleichsam für alle Staaten Gültigkeit haben. Hamiltons Vorschlag lasse jedoch prinzipiell für jeden Staat einen eigenen zu und führe zu einer willkürlichen Verteilung der Sitze. Es müsse also ein einziger Teiler gefunden werden, so dass die Summe der ganzzahligen Anteile der Quotienten der Gesamtanzahl der zu verteilenden Mandate entspreche. Diese ganzzahligen Anteile sollten als Anzahl der Sitze gewählt werden.

[4] vgl. Pukelsheim (2006), S. 17.
[5] vgl. Bundestag.de (o. J.a).

Obwohl die Einführung der Methode von Hamilton bereits vom Senat und vom Repräsentantenhaus gebilligt worden war, legte George Washington sein Veto ein. Dieses sorgte dafür, dass bis 1830 das Jefferson-Verfahren genutzt wurde.

Der Belgier Victor d'Hondt, Professor für Zivil- und Steuerrecht, propagierte 1882 ein Verfahren, dass die Regeln von Jefferson auf Verhältniswahlen anwendet: Die jeweils auf die Parteien entfallenden Stimmen s_i werden durch den gemeinsamen Divisor d geteilt. Der Divisor muss dabei so gewählt werden, dass die Bedingung

$$\sum_{i=1}^{p} m_i = \sum_{i=1}^{p} \left\lfloor \frac{s_i}{d} \right\rfloor = M$$

erfüllt ist. Statt diesen Divisor durch „Ausprobieren" zu finden, lässt sich das d'Hondt'sche Höchstzahlenverfahren anwenden - es führt zu denselben Ergebnissen. Man teilt dabei die erhaltenen Stimmen jeder Partei sukzessive durch 1, 2, 3, ... Die resultierenden Quotienten werden als Höchstzahlen bezeichnet und ihrer Größe nach absteigend sortiert. Die ermittelte Reihenfolge gibt die Vergabereihenfolge der Sitze an, bis alle Plätze vergeben sind.

Die Methode nach d'Hondt wurde seit den Wahlen zum elften Deutschen Bundestag durch die Sitzverteilung nach Hare-Niemeyer abgelöst. Sie wird jedoch noch immer in einigen Landtagswahlen eingesetzt.[6]

Das Verfahren zählt zu den Divisorverfahren, da es von einem festen Divisor ausgeht. Wegen seiner speziellen Vorgehensweise heißt es Divisorverfahren mit Abrundung.

Für das eingangs formulierte Beispiel ergibt sich nach der Methode nach d'Hondt die Mandatsverteilung, wie sie in Tabelle 3 dargestellt ist.

Partei	**Stimmenanteil**	**Mandate**
A	32,1%	33
B	28,9%	29
C	14,3%	14
D	12,2%	12
E	8,7%	9
F	3,8%	3

Tabelle 3: Mandatsverteilung nach d'Hondt

2.1.3 Methode nach Sainte-Laguë

Im Jahre 1832 untersuchte Daniel Webster, wie sich die Zuteilung der Sitze des US-Repräsentantenhauses bei Verwendung verschiedener Verfahren verhielt. Sie erschienen ihm alle nicht im Sinne der Verfassung zu arbeiten, und er schlug selbst ein Verfahren vor, das dem Jefferson-Verfahren ähnelt: Der Divisor soll hier so gewählt werden, dass die Bedingung $\sum_{i=1}^{p} m_i = \sum_{i=1}^{p} \left\langle \frac{s_i}{d} \right\rangle = M$ erfüllt

[6] vgl. Bundestag.de (o. J.b).

ist. Der Operator $\langle . \rangle$ bedeutet hier „zur nächstgelegenen ganzen Zahl runden“ und wird als Standardrundung bezeichnet.

Auch für diese Methode existiert ein Höchstzahlenverfahren, das zu denselben Ergebnissen führt. Man teilt dabei die erhaltenen Stimmen jeder Partei sukzessive durch die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, ... Die resultierenden Quotienten werden ihrer Größe nach absteigend sortiert. Die ermittelte Reihenfolge gibt die Vergabereihenfolge der Sitze an.

Der französische Mathematikprofessor André Sainte-Laguë war der erste, der dieses Verfahren mit der Begründung einführte, es sichere in optimaler Weise die Erfolgswertgleichheit der Wählerstimmen.[7] Seit 1980 wird es auf Anraten von Hans Schepers im Bundestag angewandt, um die Sitzverteilung in den Ausschüssen zu berechnen. Es wird daher auch manchmal als Methode nach Sainte-Laguë/Schepers bezeichnet.[8]

Das Verfahren zählt zu den Divisorverfahren, da es wie auch die Methode nach d'Hondt von einem festen Divisor ausgeht. Wegen seiner speziellen Vorgehensweise heißt es Divisorverfahren mit Standardrundung.

Für das zu Beginn formulierte Beispiel ergibt sich nach der Methode nach Sainte-Laguë die Mandatsverteilung, wie sie in Tabelle 4 dargestellt ist.

Partei	**Stimmenanteil**	**Mandate**
A	32,1%	32
B	28,9%	29
C	14,3%	14
D	12,2%	12
E	8,7%	9
F	3,8%	4

Tabelle 4: Mandatsverteilung nach Sainte-Laguë

2.2 Weitere Verfahren

Es existieren noch verschiedene weitere Verfahren, teils Mischformen, von denen vier an dieser Stelle kurz aufgeführt werden:

Methode nach Lowndes: Im Jahre 1822 schlug der Kongressabgeordnete William Lowndes vor, das Verfahren von Hamilton zu modifizieren. Bevor die Reste der Größe nach sortiert werden, sollten sie zunächst durch die Anzahl der Mandate geteilt werden, die den Parteien jeweils schon zugeteilt wurden. Erst anhand dieser Ergebnisse sollten die übrigen Plätze vergeben werden. Das Verfahren wurde zwar debattiert, aber nie aufgegriffen.

[7] vgl. dazu Abschnitt 2.3

[8] vgl. Pukelsheim (2006), S. 17.

Methode nach Adams: Die Methode geht auf John Quincy Adams, den sechsten Präsidenten der Vereinigten Staaten von Amerika zurück und entspricht im Wesentlichen dem Jefferson-Verfahren; abweichend werden jedoch die Quotienten nicht ab- sondern aufgerundet. Die Ansatz wurde 1832 entwickelt, kam allerdings niemals zum Einsatz.

Methode nach Dean: James Dean, Professor für Astronomie und Mathematik, schlug 1832 eine Modifikation des Jefferson-Verfahrens vor. Die Quotienten sollten nicht abgerundet werden, vielmehr sollten sie auf das harmonische Mittel der nächstgrößeren und nächstkleineren ganzen Zahl gerundet werden. Das Verfahren schien für die damalige Zeit zu kompliziert und wurde nie eingesetzt.

Methode nach Hill-Huntington: Joseph Hill schlug 1911 dem Repräsentantenhaus der Vereinigten Staaten von Amerika ein neues Verfahren vor und wurde 1921 vom Physiker Edward Huntington unterstützt. Die Methode entspricht dem Wesen nach der Jefferson-Verfahren, jedoch werden hier die Quotienten nicht abgerundet, sondern auf das geometrische Mittel der nächstgrößeren und nächstkleineren ganzen Zahl gerundet. Das Verfahren wird seit 1941 in den USA genutzt.

2.3 Gütekriterien und Paradoxien

Es lassen sich verschiedene Gütekriterien finden, an denen sich die Sitzverteilungsverfahren messen lassen:

Wahlgleichheit: Das Grundgesetz der Bundesrepublik Deutschland legt in Art. 38 bzw. 28 fest, dass Wahlen dem Gebot der Gleichheit genügen müssen. Darunter ist nicht bloß Zählwertgleichheit zu verstehen (jede abgegebene Stimme zählt als genau eine Stimme), sondern insbesondere auch Erfolgswertgleichheit: Jede Stimme soll gleiches Gewicht für die Zusammensetzung des Parlaments haben.[9] Dieser Erfolgswert wird definiert als der Quotient $\frac{m_i}{s_i}$ der erhaltenen Mandate einer Partei im Verhältnis zu den für sie abgegebenen Stimmen. Er gibt somit an, welches Gewicht einer Wählerstimme bei der Zusammensetzung des Gremiums zufällt, und im Idealfall gelte $\frac{m_i}{s_i} = \frac{M}{S} \quad (i \in [1, ..., p])$. Betrachtet man den Kehrwert des Erfolgswertes, ist man auf den Vertretungswert geführt: Jeder Abgeordnete soll die gleiche Anzahl von Wählern vertreten.

Zusätzlich fordert Kopfermann explizit die Gleichheit der Wähler und die Gleichheit der Kandidaten. Bei Wählergleichheit ist es für das Ergebnis unerheblich, ob die Wähler untereinander vertauscht werden, das heißt sich die Reihenfolge ihrer Stimmabgabe ändert. Gleichheit der Kandidaten bedeutet das Gegenstück: Das Ergebnis muss unabhängig davon sein, ob man erst die Reihenfolge der Kandidaten ändert und dann das Wahlergebnis ermittelt, oder erst das Ergebnis ermittelt und dann die Reihenfolge der Kandidaten ändert.

[9] vgl. Degenhart (2007), S. 22.

In der Praxis kommt es aufgrund der anfangs geschilderten Unteilbarkeit der Mandate unweigerlich zu Verzerrungen der Erfolgswertgleichheit. Ein gutes Sitzverteilungsverfahren sollte diese Tendenz so klein wie möglich halten. Problematisch erscheint allerdings die Tatsache, dass es zahlreiche Abweichungsmaße gibt, die mal der einen Methode eine geringe Verzerrung attestieren, mal der anderen. Eine objektiv beste Wahl scheint nicht möglich zu sein. Nach Pukelsheims Meinung sind für die politische Realität aber die betragsmäßigen Unterschiede

$$\left|\frac{m_i}{s_i} - \frac{m_j}{s_j}\right| \quad (i \neq j)$$

zweier Erfolgswerte ein überzeugendes Maß. Versucht man, alle Abweichungen der Erfolgswerte vom idealen Erfolgswert $\frac{M}{S}$ insgesamt zu minimieren, lässt sich dafür die Methode der kleinsten Quadrate nach Gauß nutzen. Zu minimieren ist demnach

$$\sum_{i=1}^{p} s_i \left(\frac{m_i}{s_i} - \frac{M}{S}\right).$$

Die Methode von Sainte-Laguë wählt als globales Abweichungsmaß gerade die Summe dieser Abweichungsquadrate und minimiert somit die Abweichung.

Folgt man der Zweckmäßigkeit dieses Maßes für die Feststellung der Erfolgswertgleichheit, schneidet das Verfahren nach Hare-Niemeyer besonders schlecht ab und sorgte schon mehrfach für Verfassungsbeschwerden. Die letzte wurde erst im Februar 2009 vom Bundesverfassungsgericht abgewiesen.[10]

Zieht man statt des Erfolgswertes den Vertretungswert als Maßstab heran, das heißt man versucht, das Maximum der Beträge der Differenzen $\left|\frac{s_i}{m_i} - \frac{s_j}{m_j}\right| \quad (i \neq j)$ zu minimieren, ergibt sich das Verfahren nach Hill-Huntington als beste Lösung. Es wird daher in den USA seit 1941 bei der Wahl zum Repräsentantenhaus genutzt, drückt jedoch eine gewisse Bevorzugung der Chancengleichheit aus Parteien- statt aus Bürgersicht aus.

Mit einem anderen Abweichungsmaß könnte auch die Methode nach Hare-Niemeyer zum geeignetsten Verfahren erklärt werden, um eine möglichst gute Vertretungswertgleichheit zu erzielen.[11]

Aus dem Rahmen fällt die Methode nach d'Hondt, bei der sogar „systematisch“ größere Parteien zu Ungunsten kleinerer bevorzugt werden. Vergleicht man die Resultate in Tabelle 2 mit Tabelle 3, wird diese Aussage offensichtlich: Die größte Partei A erhält nach d'Hondt ein Mandat, das nach Hare-Niemeyer oder Sainte-Laguë der kleinsten Partei F zugesprochen worden wäre. Die Forderung nach Erfolgswertgleichheit wird hier prinzipiell am stärksten verletzt und kann durch das ausschließliche Abrunden des Quotienten erklärt werden, das gleichsam für alle Parteien gilt. So bedeutet beispielsweise eine Verringerung der idealen Sitzzahl von 49,9

[10] vgl. Bundesverfassungsgericht.de (2009).
[11] vgl. Pukelsheim (2000).

auf 49 bedeutet lediglich eine Einbuße von etwa 2%, wohingegen eine Verringerung von 4,9 auf 4 einen Verlust von rund 20% bedeutet - ein sehr viel größeres Minus für kleine Parteien.

Die Bevorzugung großer Parteien durch den d'Hondt'schen Ansatz ist im Übrigen für den im Eingangsbeispiel erwähnten Stimmenzuwachs von SPD und Grünen verantwortlich. Durch den Zusammenschluss der Kandidaten auf einer gemeinsamen Liste erscheinen beide als eine größere Einheit und profitieren.

Quotenbedingung: Als Quotenbedingung wird die Forderung bezeichnet, dass die Anzahl der gewonnenen Mandate weniger als einen ganzen Sitz vom Idealanspruch der Partei abweicht. Mit anderen Worten soll keine Partei weniger oder mehr Sitze erhalten als die ab- bzw. aufgerundete Quote vorgibt.

Prinzipiell erfüllen lediglich die Quotenverfahren diese Vorgabe, wozu die Methode nach Hare-Niemeyer zählt: Wenn zuerst abgerundet wird und dann höchstens ein Mandat hinzukommen kann, bleibt die Sitzanzahl innerhalb der vorgeschriebenen Grenzen.

Bei den Divisorverfahren ist es hingegen möglich, dass diese Grenzen überschritten werden. Bei der Methode nach Sainte-Laguë kann dieser Fall theoretisch konstruiert werden, tritt in der Praxis aber äußerst selten auf. Beim Verfahren nach d'Hondt sind Abweichungen von der Quotenbedingung hingegen häufig zu beobachten. Sie werden insbesondere dann beträchtlich, wenn große Unterschiede in der Stimmenverteilung, eine hohe Anzahl antretender Parteien und eine niedrige Zahl zu vergebender Sitze vorliegen. Ein extremes Beispiel soll dies verdeutlichen:

Es seien zehn Mandate zu vergeben, 1.000 gültige Stimmen seien abgegeben worden. Davon entfielen 600 Stimmen auf Partei A und jeweils 50 auf acht weitere Parteien. Mit der Höchstzahlenmethode nach d'Hondt kann man einfach nachprüfen, dass Partei A mit 60% der erzielten Stimmen alle Mandate erhält. Der Idealanspruch der Partei wäre hingegen genau sechs Sitze, so dass hier um vier Sitze von der Quotenbedingung abgewichen wird.

Mehrheitsbedingung: Eine Partei, die bei einer Wahl die absolute Mehrheit der Stimmen gewinnt, soll auch die absolute Mehrheit der verfügbaren Mandate erhalten (starke Mehrheitsbedingung). Die Methode nach Hare-Niemeyer kann dieser Anforderung nicht gerecht werden. Dazu betrachte man eine Wahl mit drei Parteien, fünf zu vergebenden Mandaten und 100 gültigen Stimmen, die zu den Ergebnissen in Tabelle 5 führt:

Partei	Stimmenanteil	Quote	Mandate
A	52%	2,60	$2 + 0 = 2$
B	33%	1,65	$1 + 1 = 2$
C	15%	0,75	$0 + 1 = 1$

Tabelle 5: Verletzung der Mehrheitsbedingung durch Hare-Niemeyer

Obwohl Partei A mehr als die Hälfte der Stimmen auf sich vereinigen kann, stehen ihr weniger als die Hälfte der Mandate zu.

Bei den Divisorverfahren besteht in einigen Fällen die Möglichkeit, durch geschickte Wahl der Rahmenparameter die Erfüllung der Mehrheitsbedingung sicherzustellen. So erhielte im in Tabelle 5 gezeigten Beispiel Partei A die absolute Mehrheit der Mandate, wenn man die Methode nach d'Hondt zugrunde legt - bei ungerader Anzahl an zu vergebenden Sitzen erfüllt das Verfahren die Mehrheitsbedingung. Die Methode nach Sainte-Laguë wird den Anforderungen hingegen nicht gerecht, so dass den Divisorverfahren keine durchgängige Erfüllung des geforderten Kriteriums zugesprochen werden kann.

Hausmonotonie: Gute Sitzverteilungsverfahren sollen sicherstellen, dass keine Partei Mandate verliert, wenn das Parlament vergrößert wird bzw. umgekehrt. Die Divisor- bzw. Höchstzahlverfahren erfüllen diese Eigenschaft, da bei ihnen Sitze sukzessive verteilt werden und ein einmal erhaltenes Mandat nicht mehr verloren gehen kann. Für Quotenverfahren wie die Methode nach Hare-Niemeyer trifft dies hingegen nicht zu: Bei einer Erhöhung der Sitzanzahl im Parlament kann eine Partei trotz eines konstanten Stimmenanteils einen Sitz verlieren. Der Effekt wurde 1880 in den USA entdeckt, als das US-Repräsentantenhaus vergrößert werden sollte. Beim Übergang von 299 auf 300 Sitze hätte der Bundesstaat Alabama nur sieben statt acht Mandate erhalten - der Effekt ist daher als Alabama-Paradoxon bekannt. Noch kurioser muten die Auswirkungen der fehlenden Hausmonotonie an, die 1901 bei Berechnungen zu Tage traten: Bei einer schrittweisen Vergrößerung des Repräsentantenhauses von 350 auf 400 Mitglieder sprang die Zuteilung für den Bundesstaat Maine mehrfach zwischen drei und vier Sitzen hin und her.

Stimmenmonotonie: Eine Sitzverteilungsverfahren sollte für eine Partei keinen Verlust von Mandaten verursachen, wenn Sie Stimmenanteile hinzugewinnt und umgekehrt. Dies ist jedoch bei Quotenverfahren möglich, wie Tabelle 6 am Beispiel von zehn zu vergebenden Sitzen veranschaulicht.

Partei	**Stimmen**	**Quote**	**Mandate**
A	26.000	6,34	$6+0=6$
B	5.600	1,37	$1+1=2$
C	9.400	2,29	$2+0=2$
A	26.000	6,60	$6+1=7$
B	5.800	1,45	$1+0=1$
C	8.200	2,10	$2+0=2$

Tabelle 6: Stimmenzuwachsparadoxon bei Hare-Niemeyer

Obwohl Partei B hier 200 Stimmen hinzugewinnt und auch ihren Stimmenanteil steigert, verliert sie einen Sitz. Man spricht vom Stimmenzuwachsparadoxon oder Wählerzuwachsparadoxon.

Parteienmonotonie: Ein letztes Paradoxon kann sichtbar werden, wenn zusätzliche Parteien an einer Wahl teilnehmen, die „ihre eigenen" Wähler mitbringen, die sonst nicht gewählt hätten. In den USA ist es auch als „New State"-Paradoxon bekannt. Gute Verfahren sollten sicherstellen, dass dadurch die Sitzverteilung nicht „nachträglich" beeinflusst wird. Auch hier scheitern allein die Quotenverfahren. Nach der Methode von Hare-Niemeyer ist es gar möglich, dass eine Partei ihre relative Mehrheit nur dadurch verliert, dass eine weitere Partei hinzutritt, ohne dass sie überhaupt ein Mandat erhielte. Ein solcher Sachverhalt ist in Tabelle 7 dargestellt für den Fall, dass insgesamt 13 Sitze zu vergeben sind.

Partei	Stimmen	Quote	Mandate
A	4.223	5,67	$5+1=6$
B	3.539	4,75	$4+1=5$
C	1.924	2,58	$2+0=2$
D	-	-	-
A	4.223	5,49	$5+0=5$
B	3.539	4,60	$4+1=5$
C	1.924	2,50	$2+1=3$
D	314	0,41	$0+0=0$

Tabelle 7: Parteienzuwachsparadoxon bei Hare-Niemeyer

Bei Wahlen in der Praxis dürfte das Auftreten dieses Paradoxons in der Praxis sehr selten sein, dennoch kann es überhaupt nur bei Quotenverfahren auftreten.

2.4 Unmöglichkeitssatz

Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, dass keiner der vorgestellten Ansätze alle Gütekriterien erfüllen kann, die an Sitzverteilungsverfahren gestellt werden. Es drängt sich die Frage nach einem besseren Verfahren auf, das keine der geschilderten Schwachstellen aufweist. Die Arbeiten von Arrow haben jedoch gezeigt, dass es kein noch so kompliziertes Auswahlverfahren gibt, das sowohl demokratisch ist als auch zu rationalen kollektiven Entscheidungen führt.[12] Balinski/Young kommen speziell zu dem Ergebnis, dass nur die Divisorverfahren nicht dem Stimmenparadoxon unterliegen, dafür aber gleichzeitig auch nicht die Quotenbedingung erfüllen können. Man spricht vom Unmöglichkeitssatz.

3 Zusammenfassung und Ausblick

Es wurde gezeigt, dass es im Wesentlichen zwei Gruppen von Sitzverteilungsmethoden gibt: Quoten- und Divisorverfahren. Während erstere als einzige garantieren können, dass die Mandatszuteilung nicht mehr als ein Mandat vom rechnerischen Idealanspruch abweicht, kann es bei letzteren nicht zu unerwünschten Paradoxien kommen.

Da kein Sitzverteilungsverfahren alle gewünschten Bedingungen erfüllen kann, bedürfte es zunächst einer politischen Entscheidung, welche als wichtig empfunden werden. Erst dann ließe sich eine Empfehlung abgeben.

[12] vgl. Arrow (1951), S. 63.

Die Quotenverfahren scheinen aber aufgrund der zahlreichen möglichen Paradoxien die schlechtere Alternative zu sein. Es ist umso erstaunlicher, dass man 1987 bei der Wahl zum Bundestag das Verfahren nach d'Hondt durch das Verfahren nach Hare-Niemeyer ersetzte. Zwar wurde so der systematischen Benachteiligung kleinerer Parteien entgegengewirkt, doch hätte man dies auch mit dem Ansatz von Sainte-Laguë erreichen können. Dieser wurde bereits seit 1980 dazu benutzt, um die Sitzverteilung in Ausschüssen zu berechnen, und führt nur mit geringer Wahrscheinlichkeit zu einer Verletzung der Quotenbedingung. Über Motive und Begründungen kann an dieser Stelle leider keine Auskunft erteilt werden, da eine entsprechende Anfrage beim Referat für Öffentlichkeitsarbeit des Deutschen Bundestags bisher unbeantwortet blieb.

Voraussichtlich ab der diesjährigen Bundestagswahl wird die Methode von Sainte-Laguë auch zur Verteilung der Mandate herangezogen werden soll. Möglicherweise hat diese Umstellung eine Signalwirkung für einige Landesparlamente, die noch immer am Verfahren nach d'Hondt festhalten und so wissentlich kleinere Parteien benachteiligen.

Literaturverzeichnis

Arrow, Kenneth J. (1951): *Social Choice And Individual Values*, New York, London.

Balinski, Michel; Young, Hobart P. (1982): *Fair Representation*, New Haven, London.

Bundestag.de (o. J.a): *2. Verfahren nach Hare/Niemeyer*, URL: http://www.bundestag.de/ausschuesse/azur/azur_2.html, zuletzt abgerufen am 22.04.2009.

Bundestag.de (o. J.b): *Sitzverteilung nach d'Hondt*, URL: http://www.bundestag.de/wissen/glossar/d/dhont.html, zuletzt abgerufen am 22.04.2009.

Bundesverfassungsgericht.de (2009): *BVerfG, 2 BvC 6/04 vom 26.02.2009*, Absatz-Nr. (1 - 24), URL: http://www.bundesverfassungsgericht.de/entscheidungen/cs20090226_2bvc000604.html, zuletzt abgerufen am 22.04.2009.

Carnal, Henri; Riedwyl, Hans (2006): *Wer kommt ins Parlament*, in: Spektrum der Wissenschaft - Dossier 5/06: Fairness, Kooperation, Demokratie, Nr. 5 (2006), S. 13-18.

Degenhart, Christoph (2007): *Staatsrecht I - Staatsorganisationsrecht*, 23. Aufl., Heidelberg.

Drösser, Christoph (2009): *Der Mathematik-Verführer*, 6. Aufl., Reinbek.

Kopfermann, Klaus (1991): *Mathematische Aspekte der Wahlverfahren*, Mannheim, Wien, Zürich.

Pukelsheim, Friedrich (1998): *Divisor oder Quote? - Zur Mathematik von Mandatszuteilungen bei Verhältniswahlen*, Augsburg.

Pukelsheim, Friedrich (2000): *Mandatszuteilungen bei Verhältniswahlen: Erfolgswertgleichheit der Wählerstimmen*, URL: http://www.math.uni-augsburg.de/stochastik/pukelsheim/2000a.html, zuletzt abgerufen am 22.04.2009.

Pukelsheim, Friedrich (2006): *Die Väter der Mandatszuteilungsverfahren*, in: Spektrum der Wissenschaft - Dossier 5/06: Fairness, Kooperation, Demokratie, Nr. 5 (2006), S. 17.

Spiegel Online (2009): *Köhlers Mehrheit schrumpft auf zwei Stimmen*, URL: http://www.spiegel.de/politik/deutschland/0,1518,615829,00.html, zuletzt abgerufen am 22.04.2009.

Taylor, Alan D.; Pacelli, Allison M. (2008): *Mathematics and Politics - Strategy, Voting, Power and Proof*, 2. Aufl., New York.

Wußing, Hans (2008): *6000 Jahre Mathematik - Eine kulturgeschichtliche Zeitreise*, Bd. 1, Berlin, Heidelberg.